数学講評

難易度：例年通り　**分量**：例年通り　**１次通過ライン**：55 %以上　**正規合格ライン**：65 %以上

小問集合１題を含む大問４題の構成は例年通りで、出題分野も繰り返し試行の確率、面積の最大最小は慶應では定番の内容である。今年の問題は、出題の内容自体は基本的なことばかりだが、式が非常に煩雑で先の見えない計算が続く。解答形式が答えのみの穴埋めであることも合わせて、慎重な計算が要求される。小問集合は非常に簡単であるのでさくっと終わらせ、第２問の確率で点数を確保した後に、第３問か第４問を腰を据えて取り組むといったところだろう。特に第４問の証明問題は式の煩雑さに加えて、着地地点が見えにくい難問であった。

I

(1)

(あ) $\frac{1}{2}$　(い) 2^{n-1}　(う) $-n-1$　(え) $-n-2$

(2)

(お) -5　(か) $-\sqrt{2}$　(き) $5\sqrt{2}$　(く) $\frac{3}{4}\pi$

(3)

(け) -2　(こ) 3　(さ) -2　(し) -1

(す) -2　(せ) $1+\sqrt{6}$　(そ) -2　(た) $1-\sqrt{6}$

(ち) $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1$　(つ) $-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+1$

(解説)

(1) 剰余の定理を用いて簡単に a, b の値が決まる. 一般に, 多項式 $P(x)$ が $(x-a)^2$で割り切れるなら $P(x)$ を関数と見なしたときの導関数 $P'(x)$ で与えられる多項式は $x-a$ で割り切れることに注意.

(2) $A=BC$ の成分を比較すると, $u\neq 0$, $\sin\theta=-\cos\theta$がわかる. θの値の範囲から $\theta=\frac{3\pi}{4}$を得る. あとは成分比較から容易に求まる.

(3) 与えられた方程式は$\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$ と同値.

双曲線 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$ に対して諸々の値 · 方程式を求めてから平行移動を施せば良い.

$\boxed{\text{II}}$

(1) $1-\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r$

(2) $2\left(\dfrac{2}{n}\right)^r-\left(\dfrac{1}{n}\right)^r$

(3) $n(n-1)(2^{r-1}-1)\left(\dfrac{1}{n}\right)^r$

(4) $1-2\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r+\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r$

(5) $\left(\dfrac{k}{n}\right)^r-\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^r$

(6) $\dfrac{1}{n^2}\{(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6\}$

(解説)

(1) 操作を r 回繰り返して, 1 もしくは 2 の玉が少なくとも 1 個取り出された確率を求める.余事象は, 1 と 2 の玉が 1 度も取り出されない, であり, その確率は$\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r$.

(2) 事象 B, C を次のようにする.B : $A\subset\{1,\ 2\}$, C : $A\subset\{1,\ 3\}$.求める確率は $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$, である.

(3) A の要素の組合せが${}_nC_2$通りあり, 各組に対して, 2 つの要素のいずれかしか取り出さない確率から 1 つの要素しか取り出さない確率の 2 倍を引いて確率を計算する.

(4) n を取り出さない確率と $n-1$ を取り出さない確率を 1 から引いてどちらも取り出さない確率を足しておけば良い.

(5) k 以下の玉のみを取り出す確率から $k-1$ 以下の玉のみを取り出す確率を引く.

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^kp_k$ を計算する.ここで行うのは頻出の計算問題である.

III

(1)

あ $\dfrac{3}{20-\left(t^2+\frac{64}{t^2}\right)}$

い $2\sqrt{2}$

う $\dfrac{t^2-10+\sqrt{t^4-11t^2+64}}{3}$

(2)

え $\dfrac{\sqrt{(16-t^2)(t^2-4)}}{2(t+4)}$

(3)

お 4

か $\dfrac{\sqrt{(16-t^2)(t^2-4)}+\sqrt{(36-t^2)(t^2-4)}}{20}$

き $\sqrt{\dfrac{140}{11}}$

(解説)

(1)

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおくと、$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理を用いて

$$\cos\theta=\frac{10-t^2}{6}$$

したがって

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{-t^4+20t^2-64}}{6}$$

よって、正弦定理より求める半径は

$$\frac{\mathrm{AC}}{2\sin\theta}=\frac{3}{20-\left(t^2+\frac{64}{t^2}\right)}$$

$t^2>0$ より、相加相乗平均の関係を用いると上式は $t^4=64$ のときに最小となる。

$\mathrm{AD}=x,\ \angle\mathrm{ADC}=\phi$ とおくと、四角形 ABCD が円に内接することから

$$\cos\theta+\cos\phi=0$$

これを計算すると、$3x^2-2(t^2-10)x+12-3t^2=0$ を得る。$X>0$ であるから $x=\dfrac{t^2-10+\sqrt{t^4-11t+64}}{3}$

(2)

$$2\times\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta=\frac{-t^4+20t^2-64}{2}$$

よって、求める半径は

$$\frac{2\times\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}=\frac{\sqrt{(16-t^2)(t^2-4)}}{2(t+4)}$$

(3)

AB, BC, CD, DA と内接円との交点をそれぞれ P, Q, R, S とおくと、$\mathrm{PB}=\mathrm{BQ}, \mathrm{QC}=\mathrm{CR}, \mathrm{RD}=\mathrm{DS}, \mathrm{SA}=\mathrm{AP}$ であることから AD が求まる。

(1)(2) と同様に $2\times\triangle\mathrm{ADC}$ を求めると

$$2\times\triangle\mathrm{ADC}=\frac{(36-t^2)(t^2-4)}{2}$$

したがって、求める半径は

$$\frac{2\times\triangle\mathrm{ABC}+2\times\triangle\mathrm{ADC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA}}=\frac{\sqrt{(16-t^2)(t^2-4)}+\sqrt{(36-t^2)(t^2-4)}}{20}$$

これを微分して最大となる t を求める。このとき、$s=t^2-4$ とおいて、s で微分すると計算が多少楽になる。

また、三角形の成立条件より $2<t<4$ すなわち $0<s<12$ であることに注意する。

$\boxed{\text{IV}}$

(1)

(あ) $\left(1+m^2\right)\left\{(a-\dfrac{k}{am})^2+\dfrac{4}{m}\right\}$

(い) $\sqrt{-\dfrac{k}{m}}$

(2)

(う) $-\dfrac{k}{a^2}$

(3) $S'(m) = -\dfrac{x_2 - x_1}{2}(a + \dfrac{k}{am})$ であり，$S'(-\dfrac{k}{a^2}) = 0$. $m < -\dfrac{k}{a^2}$ で $S'(m) < 0$ なので $S(m)$ は単調減少であり，$m > -\dfrac{k}{a^2}$ で $S'(m) > 0$ なので単調増加となる. 従って $S(m)$ は $m = -\dfrac{k}{a^2}$ で最小となる.

(4)

(え) $2k\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} - \log k - 2\log\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{k}}\right)$

(解説)

l の方程式は $y = m(x-a) + \dfrac{k}{a}$ であり，$y = \dfrac{1}{x}$ と連立して x の 2 次方程式 $mx^2 - \left(am - \dfrac{k}{a}\right)x - 1 = 0$ を得る. x_1, x_2 はこの方程式の異なる実数解である.

(1) $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (1 + m^2)(x_2 - x_1)^2$ を計算する. AB が最小になるのは $a - \dfrac{k}{am}$ が最小のとき. $m < 0$ に注意して，相加相乗平均の関係を使う.

(2) P が AB の中点だから $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ である. 上の方程式につて解と係数の関係を利用して解答を得る.

(3) $D(x_1,\ 0)$, $E(x_2,\ 0)$ とする. S は台形 $ADEB$ の面積から $\dfrac{1}{x}$ を x_1 から x_2 まで積分した値を引いて $\dfrac{m}{2}(x_2^2 - x_1^2) - (am - \dfrac{k}{a})(x_2 - x_1) - \log x_2 + \log x_1$. x_1, x_2 が上の方程式の解であることを利用して $S(m) = -\dfrac{m}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \log x_2 + \log x_1$ となる. 合成関数の微分法を使ってこれを m について微分する. 解と係数の関係を利用して変形を行うと，解答の形を得る. ここで，$x_1 + x_2 = a - \dfrac{k}{am}$ により $x_1' + x_2' = \dfrac{k}{am^2}$ ($'$ は m についての微分を示す) となることに注意する.

(4) 単純な計算をするのみ.