

杏林大学医学部 2011年度 数学 解答速報

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

数学講評

難易度：やや難化 分量：昨年並み 一次通過ライン：60%程度 正規合格ライン：70%以上
 問題の分量自体は例年並みであるが、計算量がやや増えていて、解きにくい問題や手間のかかる問題が増えているので、合格ラインは少し下がるものと思われる。
 具体的には、Iの傍接円やIIIのチェビシェフの多項式は、有名問題であるが、受験生にとっては典型問題ではなかったかも知れない。しかし、チェビシェフの多項式については、入試でもときどき出題されており、2008年の慈恵でも出題されている。
 典型問題であるIIとIVを確保した上で、IとIIIでどれだけ得点を上積みできたかが（Iの前半やIIIの(a)は基本的な問題である）合否を決するであろう。

I

解答

ア：3 イ：7 ウ：9 エ：2 オ：9 カ：4 キ：2 ク：3 ケ：3 コ：5
 サ：2 シ：5 ス：4 セ：6 ソ：5 タ：5 チ：2 ツ：2 テ：2

解説

ア：余弦定理

イ-オ： $\vec{OC} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}$ とおき、 $\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0$ より t をもとめる。

カ-ク：前問の答えを2乗する。三平方の定理を用いても良い。

ケ-シ：角の二等分線の性質より、 $OA : OB = AD : BD$ 。

ス-ソ：前問の答えを2乗する。

タ-チ：点Eが直線OD上にあることより、実数 k を用いて、 $\vec{OE} = k\vec{OD}$ と表せる。一方、点Eが $\angle OAB$ の外角の二等分線上にあることより、実数 l を用いて、 $\vec{OE} = \vec{OA} + l\left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)$ と表せる。あとは、2式を \vec{OA}, \vec{OB} にそろえて、係数比較から k を求めればよい。 $\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$ と $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ が1辺が1のひし形をなしているため、その対角線を表すベクトル $\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ が角の二等分線になっている。

ツ-テ：点Eから直線ABに下ろした垂線の足をFとし、EFを求めればよい。 $\triangle OCD$ と $\triangle EFD$ の相似を利用する。相似比は前問より2:3。

コメント

まず、「ア-ソ」までは典型問題なので確実に押さえない。内角の二等分線は典型的な題材であるが、外角の二等分線といわれ戸惑った受験生が多いはず。ベクトルでの角の二等分線の扱い方として、対辺の内分比を利用する方法のほかに、上記の解法の単位ベクトルを用いたひし形を利用する方法を覚えておくと、より多くの問題に対応できる。

医学部合格に必要なすべてを完成させます

AM&AMS

受付時間
〈平日 12-20時〉

TEL.03-3443-1010

PC <http://www.ams01.co.jp/> / i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間
〈平日 12-20時〉

TEL.03-3443-0108

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> / i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

杏林大学医学部 2011年度 数学 解答速報

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

II

解答

- (1) ア: 4 イ: 2 ウ: 2 エ: 1 オ: - カ: 1 キ: 4 ク: 1 ケ: - コ: 1
 サ: 2 シ: 2 ス: 1 セ: 5 ソ: - タ: 3 チ: 1
- (2) ツ: - テ: 1 ト: - ナ: 3

解説

ア-シ: 計算するだけ.

ス-セ: $AB \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算する.

ソ-チ: $A^{-1}B \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = AB^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ を両辺計算し比較する.

ツ-ナ: C は原点を中心に $\frac{7}{6}\pi$ 回転する行列.

コメント

単純な計算問題なので、計算ミスにだけ注意して素早く片付ける。(2) は見た瞬間に回転行列だと気づかなくてはいけない。

III

解答

- (a) ア: 2 イ: 9 ウ: 2 エ: 7 オ: 2 カ: 2 キ: 4 ク: 3
- (b) ケ: 8 コ: 6 サ: 1 シ: 4 ス: 1
- (c) セ: - ソ: 1 タ: 2 チ: 0
- (d) ツ: 6 テ: - ト: 1 ナ: 2

解説

ア-ク: $f(f(f(\cos \theta))) = \cos \theta \Leftrightarrow \cos 8\theta - \cos \theta = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{9}{2}\theta \sin \frac{7}{2}\theta = 0$

よって、 $\theta = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{9}\pi, \dots$ または $\theta = \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi, \dots$

一方、 $f(\cos \theta) = \cos \theta \Leftrightarrow \cos 2\theta - \cos \theta = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \frac{3}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta = 0$

であるから、上記のうち $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のみ不適。

以上より、小さい順に $\theta = \frac{2}{9}\pi, \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$

問題文が少し紛らわしいが、キが5番目、クが6番目という意味ではなく、キとクのどちらかが5番目で、もう片方が6番目という意味である。

ケ-ス: $f(f(f(x))) - x = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1$ であるが、問題文より $f(x) - x$ を因数に持つ、すなわち $x = 1, -\frac{1}{2}$ が解であることがわかる ((a) からわかる) ので、組み立て除法などを用い

医学部合格に必要なすべてを完成させます

アム&アムス

受付時間 <平日 12-20時> **TEL.03-3443-1010**

PC <http://www.ams01.co.jp/> / i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 <平日 12-20時> **TEL.03-3443-0108**

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> / i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

杏林大学医学部 2011年度 数学 解答速報

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

て $f(f(f(x))) - x = (x-1)(2x+1)(64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 24x^3 + 28x^2 + 2x - 1)$ と因数分解できる。
 あとは、 $g(x)h(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 24x^3 + 28x^2 + 2x - 1$ なので、問題文からわかる係数をヒントに残りの係数を決めればよい。

セ-チ: $g(x), h(x)$ は 3 次式なので、それぞれ最高 3 個の解を持つが、(a) より $\cos \frac{2}{9}\pi, \cos \frac{2}{7}\pi, \cos \frac{4}{9}\pi, \cos \frac{4}{7}\pi, \cos \frac{6}{9}\pi, \cos \frac{8}{9}\pi$ がその 6 つの解である。($f(\cos \theta) \neq \cos \theta$ によって除かれている分が、 $f(x) - x$ の部分に対応する解である。) あとは、それぞれが $g(x), h(x)$ どちらの解であるか決めねばならない。(a) での計算過程から、 $\cos \frac{2}{9}\pi, \cos \frac{4}{9}\pi, \cos \frac{8}{9}\pi$ の 3 つと、 $\cos \frac{2}{7}\pi, \cos \frac{4}{7}\pi, \cos \frac{6}{7}\pi$ の 3 つが組であると考えてよい。あとは、3 解の積の符号を確かめると、 $\cos \frac{2}{9}\pi \cos \frac{4}{9}\pi \cos \frac{8}{9}\pi < 0$, $\cos \frac{2}{7}\pi \cos \frac{4}{7}\pi \cos \frac{6}{7}\pi > 0$ であるから、3 次方程式の解と係数の関係より、 $g(x) = 0$ の解が $\cos \frac{2}{9}\pi, \cos \frac{4}{9}\pi, \cos \frac{8}{9}\pi$ の 3 つで、 $h(x) = 0$ の解が $\cos \frac{2}{7}\pi, \cos \frac{4}{7}\pi, \cos \frac{6}{7}\pi$ の 3 つであるとわかる。以上より、 $g(\cos \theta) = 0$ を満たす θ とは $\theta = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$ のことであるとわかるので、 $\cos 3\theta = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ である。また、 $\cos \beta$ は $h(x) = 0$ の解であるので、当然 $h(\cos \beta) = 0$ である。

ツ: $g(x) = 0$ の解と係数の関係を利用する。

テ-ナ: $h(x) = 0$ の解と係数の関係を利用する。

コメント

(a) は典型的な三角方程式だから問題ないが、(b) で手が止まるはず。全体的に時間がないので、早々に見切りをつけて他を先に片付けたほうが良い。

$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$ (xy 平面上に原点中心の正 n 角形を書くとわかる) を知っていれば、(d) を先に解き、解と係数の関係から遡って (b) を解くこともできるが、どちらにしてもかなり手間がかかる。

IV

解答

ア: 1 イ: 3 ウ: 3 エ: 2 オ: 1 カ: 3 キ: 3 ク: 8 ケ: - コ: 1

サ: 2 シ: 5 ス: 2 セ: 9 ソ: 2 タ: 3 チ: 3 ツ: 1 テ: 6

解説

ア-エ: $\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos x) = 0$

オ-サ: $f(x) = \sin x - \sin 2x$ と置くと、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

シ-ス: 2 曲線の上下関係に注意して、求める面積は $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$

セ-テ: 「直線 $y = -1$ のまわりに回転」とあるが、全体を y 軸方向に $+1$ 平行移動させ、「 x 軸のまわりに回転」と読み替えれば典型的な回転体の求積問題。

医学部合格に必要なすべてを完成させます

ams アムス

受付時間 <平日 12-20 時> TEL.03-3443-1010

PC <http://www.ams01.co.jp/> /i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 <平日 12-20 時> TEL.03-3443-0108

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> /i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

杏林大学医学部 2011年度 数学 解答速報

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

求める体積は $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \pi \{(\sin x + 1)^2 - (\sin 2x + 1)^2\} dx$

コメント

「ア-ス」は確実に押さえない典型問題。最後の回転体も、回転軸がいつもと違うが落ち着いて考えれば簡単な問題である。計算が少し煩雑ではあるが、ミスせず完答して欲しい大問であった。

アムス

アムス

医学部合格に必要なすべてを完成させます

アムス

受付時間 **TEL.03-3443-1010**
<平日 12-20時>

PC <http://www.ams01.co.jp/> / i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 **TEL.03-3443-0108**
<平日 12-20時>

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> / i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>