Windomの解答速報 杏林大学(医) 数学

Ⅰ

ア　3	イ　7	ウ　9	エ　2	オ　9
カ　4	キ　2	ク　3	ケ　3	コ　5
サ　2	シ　5	ス　4	セ　6	ソ　5
タ　5	チ　2	ツ　2	テ　2	

Ⅱ

ア　4	イ　2	ウ　2	エ　1	オ　－
カ　1	キ　4	ク　1	ケ　－	コ　1
サ　2	シ　2	ス　1	セ　5	ソ　－
タ　3	チ　1	ツ　－	テ　1	ト　－
ナ　3				

Ⅲ

ア　2	イ　9	ウ　2	エ　7	オ　2
カ　2	キ　4	ク　3	ケ　8	コ　6
サ　1	シ　4	ス　1	セ　－	ソ　1
タ　2	チ　0	ツ　6	テ　－	ト　1
ナ　2				

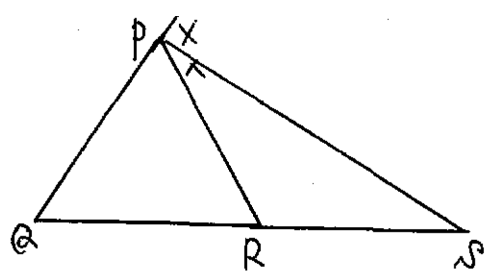
Ⅳ

ア　1	イ　3	ウ　3	エ　2	オ　1
カ　3	キ　3	ク　8	ケ　－	コ　1
サ　2	シ　5	ス　2	セ　9	ソ　2
タ　3	チ　3	ツ　1	テ　6	

講評

Ⅰ，Ⅱ，Ⅳは基本的，Ⅲは計算量も多く，時間内で完答は難しい。

Ⅰは外角の二等分線の性質



PQ：PR＝QS：SR を利用する。

Ⅱは１次変換の問題としては基本的。(3)で C が回転行列（原点回りに $\frac{7}{6}\pi$ 回転）だから　C^8 は $\frac{7\pi}{6}\times 8=\frac{28\pi}{3}=8\pi+\frac{4\pi}{3}$ 回転となる。

従って，$C^8=\begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3}\\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3}\end{pmatrix}$

となる。

Ⅲは

(a)で $f(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

$f(f(\cos\theta))=\cos 4\theta$

$f(f(f(\cos\theta)))=\cos 8\theta$

を利用して，$\cos 8\theta=\cos\theta$

差を積に直して θ を求める。

(d) では $\cos\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos 4\alpha$ が $g(\cos\theta)=0$ の解だから解と係数の関係を利用して

$$\cos\alpha\cos 2\alpha+\cos 2\alpha\cos 4\alpha+\cos 4\alpha\cos\alpha=-\frac{6}{8}$$

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=-\frac{1}{8}$$

これから $\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 4\alpha}$

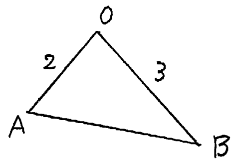
$$=\frac{\cos 2\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha}$$

$$=\frac{-\frac{6}{8}}{-\frac{1}{8}}=6$$

Ⅳは基本的で，体積は $y=-1$ が回転軸だから２曲線を $y=\sin x+1$，$y=\sin 2x+1$ として回転体の体積を求める。

Ⅲ以外は基本的なので合格ラインは 70%位となるであろう。

I



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

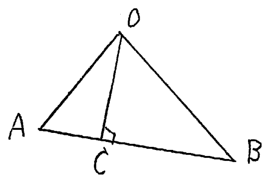
$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$=9-4+4$

$=9$

$\Longrightarrow |\overrightarrow{AB}|=3$



CはAB上の点だから

$\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおける

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ だから

$(-\vec{a}+\vec{b})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}=0$

$-(1-t)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$-4(1-t)+2(1-2t)+9t=0$

$9t-2=0$

$t=\frac{2}{9}$

従って $\overrightarrow{OC}=\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}$

$=\frac{7}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OC}|=\frac{1}{9}|7\vec{a}+2\vec{b}|$

ここで

$|7\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=49|\vec{a}|^2+28\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

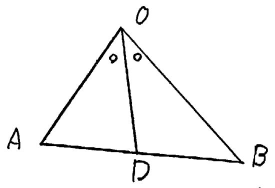
$=49\cdot4+28\cdot2+4\cdot9$

$=4\cdot36\cdot2$

$\Longrightarrow |7\vec{a}+2\vec{b}|=12\sqrt{2}$

これから

$|\overrightarrow{OC}|=\frac{12\sqrt{2}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$



内角の二等分線の性質から

AD:DB=OA:OB=2:3

$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

$=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OD}|=\frac{1}{5}|3\vec{a}+2\vec{b}|$

ここで

$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\cdot4+12\cdot2+4\cdot9$

$=12\cdot8$

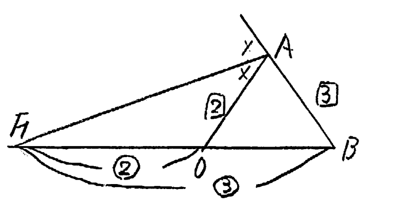
$=4^2\cdot6$

$\Longrightarrow |3\vec{a}+2\vec{b}|=4\sqrt{6}$

これから

$|\overrightarrow{OD}|=\frac{4\sqrt{6}}{5}$

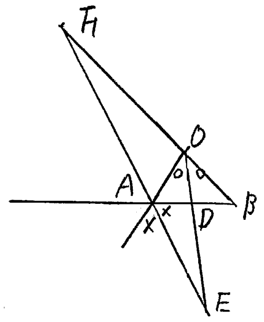
次に∠OABの外角の二等分線とOBとの交点をFとすると，外角の二等分線の性質から



AB:AO=FB:FO

3:2=FB:FOだから

$\overrightarrow{OF}=-2\overrightarrow{OB}=-2\vec{b}$



$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}$ とおくと

$\overrightarrow{OE}=\frac{3k}{5}\vec{a}+\frac{2k}{5}\vec{b}$

また，EはAF上の点だから

$\overrightarrow{OE}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OF}$

$=(1-s)\vec{a}-2s\vec{b}$

$\vec{a},\vec{b}$ は1次独立だから

比較して

$\frac{3k}{5}=1-s$ ---①

$\frac{2k}{5}=-2s$

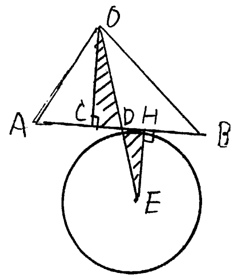
$s=-\frac{1}{5}k$

①へ代入

$\frac{3}{5}k=1+\frac{1}{5}k$

$\frac{2}{5}k=1 \Longrightarrow k=\frac{5}{2}$

従って $\overrightarrow{OE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{OD}$



EからABへ下ろした垂線の足をHとすると

△OCD ∽ △EHD

従って

OC:EH=OD:DE ---(※1)

ここで $OC=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

$OE=\frac{5}{2}OD$ だから

$DE=OE-OD=\frac{3}{2}OD$

(※1)は

$\frac{4}{3}\sqrt{2}:EH=OD:\frac{3}{2}OD=2:3$

$EH=2\sqrt{2}$

半径は $2\sqrt{2}$

II (1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}$

$f\circ g$ を表す行列は

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\6&-1\end{pmatrix}$

従って $\begin{pmatrix}-2&3\\6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

$f^{-1}\circ g$ を表す行列は

$A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ ---①

$f\circ g^{-1}$ を表す行列は

$AB^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&3\\-3&-5\end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&3\\-3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\alpha+3\beta\\-3\alpha-5\beta\end{pmatrix}$ ---②

①=② だから

$\frac{1}{4}(5\alpha+3\beta)=\alpha$ ---③

$-\frac{1}{4}(3\alpha+5\beta)=1$ ---④

③ $\Longrightarrow$ $\alpha+3\beta=0$

$\alpha=-3\beta$ ---③'

④ $\Longrightarrow$ $3\alpha+5\beta=-4$

③'を代入

$-9\beta+5\beta=-4$

$\beta=1$

③'より $\alpha=-3$

(2) $C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&1\\-1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ---(※)

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ を

満足するθ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は

$\theta=\frac{7}{6}\pi$

従って

$C=\begin{pmatrix}\cos\frac{7}{6}\pi&-\sin\frac{7}{6}\pi\\\sin\frac{7}{6}\pi&\cos\frac{7}{6}\pi\end{pmatrix}$

$C^8=\begin{pmatrix}\cos8\cdot\frac{7}{6}\pi&-\sin8\cdot\frac{7}{6}\pi\\\sin8\cdot\frac{7}{6}\pi&\cos8\cdot\frac{7}{6}\pi\end{pmatrix}$

$\frac{8\cdot7}{6}\pi=\frac{28}{3}\pi=8\pi+\frac{4\pi}{3}$

従って

$C^8=\begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{3}&-\sin\frac{4\pi}{3}\\\sin\frac{4\pi}{3}&\cos\frac{4\pi}{3}\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$

$C^8\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

III

$f(x)=2x^2-1$

(a) $f(f(f(\cos\theta)))=\cos\theta$ --- ①

$f(\cos\theta)\neq\cos\theta$ --- ②

$f(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$

$f(f(\cos\theta))=2\cos^2 2\theta-1=\cos4\theta$

$f(f(f(\cos\theta)))=2\cos^2 4\theta-1=\cos8\theta$

①より $\cos8\theta=\cos\theta$

$\cos8\theta-\cos\theta=0$

差を積に直すと

$-2\sin\frac{9}{2}\theta\sin\frac{7}{2}\theta=0$

$\sin\frac{9}{2}\theta=0$ ---- ③

または

$\sin\frac{7}{2}\theta=0$ --- ④

③,④を満足する最小の正の角は

③の方は $\frac{9}{2}\theta=\pi\Rightarrow\theta=\frac{2}{9}\pi$

④の方は $\frac{7}{2}\theta=\pi\Rightarrow\theta=\frac{2}{7}\pi$

従って $\alpha=\frac{2}{9}\pi$, $\beta=\frac{2}{7}\pi$

次に 3番目,4番目に小さい角は

③より $\frac{9}{2}\theta=2\pi\Longrightarrow\theta=\frac{4}{9}\pi=2\alpha$ (3番目)

④より $\frac{7}{2}\theta=2\pi\Longrightarrow\theta=\frac{4}{7}\pi=2\beta$ (4番目)

5番目,6番目に小さい角は

③より $\frac{9}{2}\theta=3\pi\Longrightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$

しかしこれは

$f(\cos\theta)=\cos2\theta=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\theta=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$f(\cos\theta)=\cos\theta$となり

②を満足せず不適

従って次の角は

$\frac{9}{2}\theta=4\pi\Longrightarrow\theta=\frac{8\pi}{9}=4\alpha$ (6番目)

④より $\frac{7}{2}\theta=3\pi\Longrightarrow\theta=\frac{6}{7}\pi=3\beta$ (5番目)

(b)

$f(f(f(x)))-x=(f(x)-x)g(x)h(x)$ --- (#)

(#)の左辺 $=2\left[2\{f(x)\}^2-1\right]^2-1-x$

$=8\{f(x)\}^4-8\{f(x)\}^2-x+1$

$=8\{f(x)\}^2\left[\{f(x)\}^2-1\right]-(x-1)$

$=8(2x^2-1)^2\{(2x^2-1)^2-1\}-(x-1)$

$=8(2x^2-1)^2(4x^4-4x^2)-(x-1)$

$=32(2x^2-1)^2\cdot x^2(x^2-1)-(x-1)$

$=(x-1)\{32x^2(2x^2-1)^2(x+1)-1\}$

$=(x-1)\{32x^2(4x^4-4x^2+1)(x+1)-1\}$

$=(x-1)\{32x^2(4x^5+4x^4-4x^3-4x^2+x+1)-1\}$

$=(x-1)(128x^7+128x^6-128x^5-128x^4+32x^3+32x^2-1)$

$=(x-1)(2x+1)(64x^6+32x^5-80x^4-24x^3+28x^2+2x-1)$

$=(f(x)-x)(64x^6+32x^5-80x^4-24x^3+28x^2+2x-1)$

$\left[\ f(x)-x=2x^2-1-x=(x-1)(2x+1)\ \right]$

(#)の右辺と比較して

$g(x)h(x)=64x^6+32x^5-80x^4-24x^3+28x^2+2x-1$

$g(x)=Ax^3-Bx+C$

$h(x)=8x^3+Dx^2-4x-E$

とおくと

$g(x)h(x)=8Ax^6+ADx^5-(4A+8B)x^4-(AE+BD-8C)x^3+(4B+CD)x^2+(BE-4C)x-CE$

比較して

$8A=64$

$AD=32$

$4A+8B=80$

$AE+BD-8C=24$

$4B+CD=28$

$BE-4C=2$

$-CE=-1$

$A=8,\ B=6\ \ C=1$

$D=4\ \ E=1$

従って

$g(x)=8x^3-6x+1$

$h(x)=8x^3+4x^2-4x-1$

(c) $g(\cos\theta)=8\cos^3\theta-6\cos\theta+1=0$

ここで 3倍角の式から

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$だから

$g(\cos\theta)=2\cos3\theta+1=0$

$\Longrightarrow\cos3\theta=-\frac{1}{2}$

また (#)に$\cos\beta$を代入すると

$f(f(f(\cos\beta)))-\cos\beta=\{f(\cos\beta)-\cos\beta\}g(\cos\beta)h(\cos\beta)$

(a)より $f(f(f(\cos\beta)))-\cos\beta=0$だから

$\{f(\cos\beta)-\cos\beta\}g(\cos\beta)h(\cos\beta)=0$ --- (※)

②より $f(\cos\beta)\neq\cos\beta$だから

$f(\cos\beta)-\cos\beta\neq0$

また $g(\cos\beta)=8\cos^3\beta-6\cos\beta+1$

$=2\cos3\beta+1$

$\beta=\frac{2}{7}\pi$だから

$\cos3\beta=\cos\frac{6}{7}\pi\neq-\frac{1}{2}$

従って $g(\cos\beta)\neq0$

以上から (※)より

$h(\cos\beta)=0$

(d) (c)より

$g(\cos\theta)=2\cos3\theta+1$

$\alpha=\frac{2}{9}\pi$のとき

$g(\cos\alpha)=2\cos3\cdot\frac{2}{9}\pi+1$

$=2\cos\frac{2}{3}\pi+1=0$

$g(\cos2\alpha)=2\cos3\cdot\frac{4}{9}\pi+1$

$=2\cos\frac{4}{3}\pi+1=0$

$g(\cos4\alpha)=2\cos3\frac{8\pi}{9}+1$

$=2\cos\frac{8\pi}{3}+1=0$

$\cos\alpha$, $\cos2\alpha$, $\cos4\alpha$は

等しくないので

この3つは $g(\cos\theta)=0$の

異なる3実数解となる.

従って $g(x)=0$の解と

係数の関係から

$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos4\alpha=0$

$\cos\alpha\cos2\alpha+\cos2\alpha\cos4\alpha+\cos4\alpha\cos\alpha=-\frac{6}{8}$

$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=-\frac{1}{8}$

このとき

$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos2\alpha}+\frac{1}{\cos4\alpha}$

$=\frac{\cos2\alpha\cos4\alpha+\cos4\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\cos2\alpha}{\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}$

$=\frac{-\frac{6}{8}}{-\frac{1}{8}}=6$

次に

$\cos\beta+\cos2\beta+\cos3\beta$

$=\cos\beta+(2\cos^2\beta-1)+4\cos^3\beta-3\cos\beta$

$=4\cos^3\beta+2\cos^2\beta-2\cos\beta-1$ ---- (♪)

ここで $h(\cos\beta)=0$ だから

$8\cos^3\beta+4\cos^2\beta-4\cos\beta-1=0$

$4\cos^3\beta+2\cos^2\beta-2\cos\beta=\frac{1}{2}$

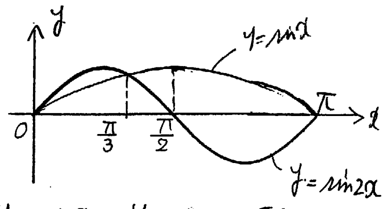
従って

$(与)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

つまり

$\cos\beta+\cos2\beta+\cos3\beta=-\frac{1}{2}$

IV



$y=\sin x$ と $y=\sin 2x$ を連立

$\sin x=\sin 2x$

$\sin x=2\sin x\cos x$

$2\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$

$x=0,\pi$ を除くから

$\cos x=\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$ より $x=\frac{\pi}{3}$

$y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$

交点は $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt3}{2}\right)$

次に

$f(x)=\sin x-\sin 2x\ (0\leqq x\leqq\pi)$

とおく

$f'(x)=\cos x-2\cos 2x$

$=\cos x-2(2\cos^2x-1)$

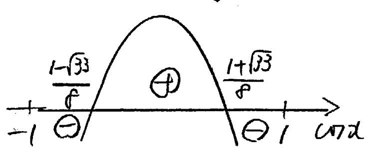
$=-4\cos^2x+\cos x+2$

$f'(x)=0$ となる x は

$-4\cos^2x+\cos x+2=0$

$4\cos^2x-\cos x-2=0\cdots(※)$

$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$



$\cos x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

$\cos x_2=\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

とすると

x	0		x_1		x_2		π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

極小となる x_1 は

$\cos x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

また (※) の解と係数の関係から

$\cos x_1\cos x_2=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

また, 2曲線によって囲まれる面積を S とすると

$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin2x-\sin x)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$=\left[-\frac{\cos2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$+\left[-\cos x+\frac{\cos2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

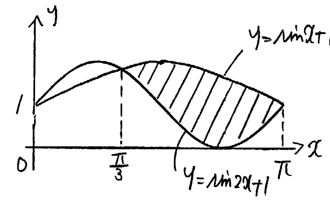
$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)$

$+\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{5}{2}$

次に $y=-1$ を新たな x 軸と考えると 2曲線は

$\begin{cases}y=\sin x+1\\y=\sin 2x+1\end{cases}$ とする



求める体積を V とすると

$\frac{V}{\pi}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x+1)^2dx$

$-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin2x+1)^2dx$

ここで

$(\sin x+1)^2=\sin^2x+2\sin x+1$

$=\frac{1-\cos2x}{2}+2\sin x+1$

$=\frac{3}{2}-\frac{\cos2x}{2}+2\sin x$

$(\sin2x+1)^2=\sin^22x+2\sin2x+1$

$=\frac{1-\cos4x}{2}+2\sin2x+1$

$=\frac{3}{2}-\frac{\cos4x}{2}+2\sin2x$

$(\sin x+1)^2-(\sin2x+1)^2$

$=-\frac{\cos2x}{2}+2\sin x+\frac{\cos4x}{2}-2\sin2x$

$\frac{V}{\pi}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left\{(\sin x+1)^2-(\sin2x+1)^2\right\}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(-\frac{\cos2x}{2}+2\sin x+\frac{\cos4x}{2}-2\sin2x\right)dx$

$=\left[-\frac{\sin2x}{4}-2\cos x+\frac{\sin4x}{8}+\cos2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=(2+1)-\left(-\frac{\sqrt3}{8}-1-\frac{\sqrt3}{16}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt3}{16}$

従って $V=\left(\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt3}{16}\right)\pi$