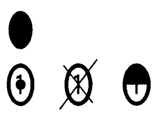
平成23年度入学試験問題

数　　　学

I　注　意　事　項

1. 指示があるまで，この冊子の中を見てはいけません。
2. 設問はⅠからⅣまであります。
3. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
   ①　氏名欄……………………氏名を記入しなさい。
   ②　受験番号欄………………受験番号（6桁の数字）を記入し，受験番号をマーク欄に必ずマークしなさい。
4. マークにはＨＢの鉛筆を使用し，次の例のように，濃く正しくマークしなさい。

良い例………
悪い例………



5. 正確にマークされていない場合，採点できないことがあります。
6. 答えを修正する場合は必ず「プラスチック製消しゴム」で完全に消し，消しくずを解答用紙上に残してはいけません。
7. 中途退場は認めません。
8. 試験中に質問がある場合は，手をあげて申し出なさい。
9. この冊子の余白を計算に用いてかまいません。
10. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

I　平面上に 3 点 O，A，B があり，$|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = 3$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ とする．

$|\overrightarrow{AB}| = \boxed{\text{ア}}$ である．直線 AB 上に，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ となる点 C を取ると，

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{OB},\quad |\overrightarrow{OC}| = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる．

∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を D とすると，

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{OB},\quad |\overrightarrow{OD}| = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

∠AOB の二等分線と∠OAB の外角の二等分線の交点を E とすると，

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{OD}$$

となる．

また，点 E を中心とし，線分 AB に接する円の半径は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である．

Ⅱ (1) 1次変換f，gを表す行列を，それぞれ$A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -2 & 1\end{pmatrix}$とする．

A，Bの逆行列A^{-1}，B^{-1}は，

$$A^{-1}=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オカ}}\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{ク}} & \boxed{\text{ケコ}} \\ \boxed{\text{サ}} & \boxed{\text{シ}}\end{pmatrix}$$

となる．

点(1，1)は合成変換$f\circ g$によって点($\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$)に移動する．また，合成変換$f^{-1}\circ g$による点(1，α)の像と，合成変換$f\circ g^{-1}$による点(α，β)の像が一致するとき，$\alpha=\boxed{\text{ソタ}}$，$\beta=\boxed{\text{チ}}$となる．ここで，f^{-1}，g^{-1}はそれぞれf，gの逆変換を表す．

(2) $C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$とすると，

$$C^8\begin{pmatrix}2 \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ツテ}} \\ \boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\end{pmatrix}$$

となる．

III　$f(x)=2x^2-1$ として，以下の問いに答えよ．

(a)　2つの条件

$$\left.\begin{array}{r} f(f(f(\cos\theta)))=\cos\theta \\ f(\cos\theta)\neq\cos\theta \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(*)$$

を同時に満たす正の θ のうち，最小のものを α，2番目に小さいものを β とすると，

$\alpha=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$，$\beta=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$ である．また，$(*)$ を満たす正の θ のうち，3番目あるいは4番目に小さいものは $\boxed{オ}\alpha$ や $\boxed{カ}\beta$，5番目あるいは6番目に小さいものは $\boxed{キ}\alpha$ や $\boxed{ク}\beta$ と表すことができる．

(b)　x の多項式 $f(f(f(x)))-x$ は，$f(f(f(x)))-x=(f(x)-x)g(x)h(x)$ と表せる．

ただし，

$$g(x)=\boxed{ケ}x^3-\boxed{コ}x+\boxed{サ},$$
$$h(x)=8x^3+\boxed{シ}x^2-4x-\boxed{ス}$$

である．

(c)　$g(\cos\theta)=0$ を満たす θ に対して，$\cos 3\theta=\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ が成立する．

また，$h(\cos\beta)=\boxed{チ}$ となる．

(d)　α，β に対し，次式が成立する．

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos(\boxed{オ}\alpha)}+\frac{1}{\cos(\boxed{キ}\alpha)}=\boxed{ツ},$$
$$\cos\beta+\cos(\boxed{カ}\beta)+\cos(\boxed{ク}\beta)=\frac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$$

Ⅳ 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，二つの曲線 $y = \sin x$，$y = \sin 2x$ を考える．

$x = 0$ と $x = \pi$ の点を除く，二つの曲線の交点の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とすると，

$$\alpha = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi,\quad \beta = \frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$$

である．

二つの曲線の差 $\sin x - \sin 2x$ が極小となる x の値を x_1，極大となる x の値を x_2 とすると，

$$\cos x_1 = \frac{\boxed{オ} + \sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}},\quad \cos x_1 \cos x_2 = \frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$$

が成り立つ．

二つの曲線よって囲まれる図形の面積は，$\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ となる．また，この図形の $\alpha \leqq x \leqq \pi$ の部分を，直線 $y = -1$ のまわりに回転させてできる立体の体積は，

$$\left(\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}} + \frac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツテ}}\right)\pi$$

である．