日本大学医学部 2011年度 数学 解答速報

数学講評

難易度：例年並み　**分量**：例年並み　**一次通過ライン**：65 %程度　**正規合格ライン**：75 %程度

全体を通して昨年と同じような問題構成であった。しっかり対策を立てていれば問題は無かったはずである。ただしそれゆえ計算ミスが合否に大きく影響する。

第一問：基本的な事をどれだけきちんとおさえているか問われた問題。ここで時間を使わないようにしたい。

第二問：(3) の計算がやや煩雑か。落ち着いて計算すれば解ける。

第三問：基本的なベクトルの問題。ここでも計算ミスをしないことが重要。

第四問：考え方を知っていれば、計算も複雑でないため落としたくない問題。

1

(1) $-\dfrac{1}{6} < x \leqq 4$　(2) $-1 < a < \dfrac{5}{3}$　(3) $\dfrac{1}{120}$　(4) $\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

(5) 25　(6) $\dfrac{108}{5}$　(7) $-n^2$　(8) 47

2

(1) $f(x) = 2\log x$ とおくと l の方程式は $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ で与えられるから

$$y = x - 2 + 2\log 2$$

を得る。

(2) $\alpha = 0 - 2 + 2\log 2,\ \alpha = 2\log x$ を解いて $x = \dfrac{2}{e}$ を得る。

(3) 3 直線 $l, y=\alpha, x=2$ で囲まれる三角形の面積 2 から、曲線 G と 2 直線 $y=\alpha, x=2$ で囲まれる図形の面積 $\displaystyle\int_{\frac{2}{e}}^{2} (2\log x - \alpha)\,dx$ を引いて $2 - \dfrac{4}{e}$ を得る。

3

解答

(1) $\mathrm{DG}=\dfrac{4}{3}$ (2) $\mathrm{AE}=\dfrac{21}{13}$

(3) I は DE と $\angle\mathrm{DAE}$ の二等分線の交点である。したがって,

$$\mathrm{DI}:\mathrm{EI}=\mathrm{AD}:\mathrm{AE}=3:\frac{21}{13}=13:7$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DI}}=\frac{13}{20}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

となる。ここで,

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{6}{13}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{7}{26}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{13}{20}\left(-\frac{7}{26}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{13}{40}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{20}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

解説

(1) 重心 G は中線 CD を $2:1$ に内分するので, $\mathrm{DG}=\dfrac{1}{3}\mathrm{CD}$ である。ここで,

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=16$$

$$\mathrm{DG}=\frac{1}{3}\times\sqrt{16}=\frac{4}{3}$$

(2) (1) と同様にして AG を求めると,

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right|=\frac{7}{3}$$

となる。DE は AG を DA : DG $= 3 : \dfrac{4}{3} = 9 : 4$ に内分するので,

$$\mathrm{AE} = \frac{7}{3} \times \frac{9}{9+4} = \frac{21}{13}$$

4

円 C_n, D_n の半径を各々 r_n, R_n とおく。

(1) いま $\sqrt{2}R_n = r_n - R_n$ が成り立っている。従って $R_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}r_n$ である。$r_{n+1} = r_n - 2R_n$ なので漸化式 $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}r_n$ を得る。$r_1 = 1$ より $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{n-1}$ である。

(2) 円 D_n の面積 S_n は $\pi {R_n}^2 = \dfrac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2n-2}$ である。等比無限級数の公式により

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}\frac{1}{1-(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

を得る。