数学

1 以下の設問 (1) ～ (8) については，答えだけを解答欄に書きなさい．

(1) つぎの連立不等式を解きなさい．

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \leqq 0 \\ \quad -6x - 1 < 0 \end{cases}$$

(2) a を実数とする．x の 2 次方程式 $x^2 - (a+3)x + a^2 + a + 1 = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めなさい．

(3) A，B，C，D，E，F の 6 人が，くじ引きで順番を決めて 1 列に並ぶとき，列の 1 番目に A が，3 番目に C が，5 番目に E が並ぶ確率を求めなさい．

(4) 三角形 ABC は $\angle A = 60^\circ$，$AB = 4$，$AC = 7$ を満たしている．このとき，三角形 ABC の外接円の半径の値を求めなさい．

(5)　全体集合 U とその 2 つの部分集合 A，B について，要素の個数の情報が

$$n(U)=80,\ n(A)=43,\ n(B)=28,\ n(A\cap B)=16$$

で与えられているとき，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ の値を求めなさい．ただし，$\overline{A}$ は A の補集合を，$\overline{B}$ は B の補集合を表す．

(6)　円 $C: x^2+y^2=20$ と直線 $y=2x-8$ の交点を A, B とする．ただし，y 座標が大きいほうの交点を A とする．円 C 上に動点 P をとるとき，3 点 A, B, P により作られる三角形の面積の最大値を求めなさい．

(7)　つぎの極限値を計算して，n の単項式で表しなさい．

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$

(8)　点 $(-1,\ 2)$ を点 $(-5,\ 8)$ に，点 $(3,\ -2)$ を点 $(11,\ -4)$ に移す 1 次変換(点の移動ともいう)を表す行列を A とするとき，$A^3=xA-(3x-5)E$ を満たす実数 x の値を求めなさい．ただし，E は 2 次の単位行列である．

2 座標平面上で，関数 $y = 2\log x$ のグラフを（G）で表す．ただし，log は自然対数を表す．（G）上の点 $(2,\ 2\log 2)$ における接線を l とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(2) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　l の方程式を求めなさい．

(2)　l と y 軸との交点の y 座標を α とするとき，直線 $y = \alpha$ とグラフ（G）との交点の x 座標の値を求めなさい．

(3)　グラフ（G）と接線 l および (2) の直線 $y = \alpha$ で囲まれる図形の面積を求めなさい．

3　三角形 ABC は $|\overrightarrow{AB}| = 6$，$|\overrightarrow{AC}| = 3$，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$ を満たしている．三角形 ABC の重心を G とし，線分 AB の中点を D とする．以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(2) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　線分 DG の長さを求めなさい．

(2)　$\angle$ADG の二等分線と線分 AG との交点を E とするとき，線分 AE の長さを求めなさい．

(3)　三角形 ADG の内心を I とするとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表しなさい．

4 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を C_1 とする．第 1 象限内の点で C_1 に内接する円のうち，x 軸にも y 軸にも接するものを D_1 とする．つぎに，原点 O を中心とし，円 D_1 と外接する円を C_2 とし，さらに，第 1 象限内の点で C_2 に内接する円のうち，x 軸にも y 軸にも接するものを D_2 とする(図を参照)．

以下同様に，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，原点 O を中心とし，円 D_n と外接する円を C_{n+1} とし，さらに，第 1 象限内の点で C_{n+1} に内接する円のうち，x 軸にも y 軸にも接するものを D_{n+1} とする．円 C_n の半径を r_n とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) r_n を求めて，n の式で表しなさい．

(2) 円 D_n の面積を S_n で表すとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の値を求めなさい．