

次の空欄を埋めなさい。

解答は、分数の場合には既約分数の形で、自然数の根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となるような形で書きなさい。

1

- (1) 半径 1 の円に内接する正八角形の 8 個の頂点から 3 点を選んで三角形を作るとき、もとの正八角形と 1 辺のみを共有する三角形の面積は または である。
- (2) a, b を実数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 20 = 0$ が $x = 2 + i$ を解にもつとき、 $a =$, $b =$ である。このとき、この方程式の実数解は $x =$ である。
- (3) 方程式 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$ の解は $x =$ である。
- (4) 曲線 C が媒介変数 t を用いて、 $x = 5 \cos t, y = 2 \sin t$ と表されているとき、曲線 C の $t = \frac{2}{3}\pi$ に対応する点における接線の方程式は $y =$ $x +$ であり、法線の方程式は $y =$ $x +$ である。また、この法線と x 軸との交点の座標は (, 0) である。

2

大小 2 個のさいころを同時に投げる。大きいさいころの出た目を l 、小さいさいころの出た目を m とし、 $s = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ とおく。

- (1) s の最大値は であり、 $s =$ となる確率は である。また、 s の最小値は であり、 $s =$ となる確率は である。
- (2) $s = \frac{8}{15}$ となる確率は であり、 $s = \frac{2}{3}$ となる確率は である。
- (3) $s \leq 1$ となる確率は である。
- (4) s を既約分数として表したとき、分子が 5 となる確率は である。

3

 x についての恒等式

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 + \frac{\text{ア}}{1-x},$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2 + \frac{\text{イ}}{1+x},$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = 2\left(1+x^2 + \frac{\text{ウ}}{1-x^2}\right)$$

が成り立つ。 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $1 \leq \frac{1}{1-x^2} \leq \frac{4}{3}$ であるから

$$0 \leq \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 2\left(1+x^2 + \frac{\text{ウ}}{1-x^2}\right) \leq \frac{2}{3} \text{ウ}$$

が成り立つ。 また、 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\int_0^a \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \log \text{エ},$$

$$\int_0^a (1+x^2 + \frac{\text{ウ}}{1-x^2}) dx = a + \frac{a^3}{3} + \text{オ}$$

が成り立つ。 したがって

$$0 \leq \log \text{エ} - 2\left(a + \frac{a^3}{3} + \text{オ}\right) \leq \frac{2}{3} \text{オ} \dots \text{①}$$

となる。 $\text{エ} = 2$ を満たすのは $a = \text{カ}$ のときである。 $a = \text{カ}$ を ① に代入すると

$$0 \leq \log 2 - \text{キ} \leq \frac{2}{3} \text{ク}$$

となり、誤差が 0.001 以下の $\log 2$ の近似値 キ が求められた。