東京慈恵会医科大学 2011年度 数学 解答速報

数学講評

難易度：やや難化　**分量**：例年通り　**一次通過ライン**：60 %程度　**正規合格ライン**：70 %以上

問題３は状況が複雑であり，計算も煩雑なので，多くの受験生が途中で挫折したものと思われる。したがって，この問題が出来ていなくても必ずしも悲観する必要はないが，解答できた受験生は逆に自信を持ってよいだろう。

問題１と問題２は，入試において頻出のテーマであるので，ここでの失点を如何に防ぐことが出来たかが合否を決する。

１．

(A) (1) (ア) $2-\sqrt{3}$

(2) (イ) $\dfrac{1}{36}$　　(ウ) $\dfrac{5(2^n-2)}{6^n}$

(3) (エ) $-1-\sqrt{2}$　　(オ) -2　　(カ) $-15+16\sqrt{3}i$

(B) 命題 ① について：

すべての奇数は $2n+1$ (n は整数) と表される。ところで，整数 n に対して $a=n+1,\ b=n$ は整数であり，このとき

$$a^2-b^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$$

であるから，すべての奇数は $A=\{a^2-b^2\mid a,\ b\text{ は整数 }\}$ の要素である。

命題 ② について：

まず，偶数 m が A の要素ならば，m は 4 の倍数であることを示す。

A の要素は整数 $a,\ b$ により a^2-b^2 と表されるが，

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

であり，$a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致するので，a^2-b^2 が偶数ならば，$a+b$ も $a-b$ も偶数，すなわち，

$$a+b=2m,\ a-b=2n\ (n,\ m \text{ は整数})$$

と表される。したがって，このとき

$$a^2-b^2=2m\times 2n=4mn$$

であり，これは 4 の倍数である。

ゆえに，偶数 m が A の要素ならば，m は 4 の倍数である。

次に，偶数 m が 4 の倍数であるならば，m は A の要素であることを示す。ところで，4 の倍数はすべて偶数なので，4 の倍数がすべて A の要素であることを示せばよい。

さて，任意の整数 n に対して $a=n+1,\ b=n-1$ は整数であるので

$$a^2-b^2=(n+1)^2-(n-1)^2=4n$$

は，A の定義より A の要素である。つまり，4 の倍数がすべて A の要素である。

2．

(1)　$\angle$ OPQ$=\theta$ とおけば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ \sin\theta)$ である．よって，C 上の点 R に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=((1-t)\cos\theta,\ t\sin\theta)$$

となるので，R$(x,\ y)$ とおけば

$$\begin{cases} x=(1-t)\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}$$

後は，この 2 式から θ を消去して

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$$

を得る．

(2)

(i)　$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ と C が接するとき，$t=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ となる．このとき，A$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ より，点 A で $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ と

直交する直線として $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$ が得られるが，これは明らかに楕円 $3x^2+\frac{3(2+\sqrt{3})y^2}{2}=1$ と接していない．

(ii)　A を通る直線 $y=m\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}$ と C の式から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$t^2x^2+(1-t)^2\left(mx+\frac{\sqrt{3}m+\sqrt{2}}{3}\right)^2=t^2(1-t^2)$$

$$\iff\quad \{t^2+m^2(1-t)^2\}x^2+\frac{2m(1-t)^2(\sqrt{3}m+\sqrt{2})}{3}x+\frac{(1-t)^2(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2}{9}-t^2(1-t)^2=0$$

の重解条件として，m の方程式

$$\frac{m^2(1-t)^4(\sqrt{3}m-\sqrt{2})^2}{9}-\{t^2+m^2(1-t)^2\}\left\{\frac{(1-t)^2(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2}{9}-t^2(1-t)^2\right\}=0$$

が得られる．この解 m が点 A を通る C の 2 接線の傾きである．整理すると

$$(9t^2-18t+6)m^2-2\sqrt{6}m+9t^2-2=0$$

となり，2 接線が直交する事から，2 解の積 $=-1$ で，今 $t=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\iff 9t^2-18t+6=0$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{9t^2-2}{9t^2-18t+6}&=-1\\ 9t^2-18t+6&=-9t^2+2\\ 9t^2-9t+2&=0\\ t&=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\end{aligned}$$

が得られる．

〈参考〉

一般に，楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ に対し，「その点から楕円に引いた 2 接線が直交する」ような点全体は，円

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

を描き，準円と呼ばれる．

この知識を用いると，曲線 C の準円として

$$x^2+y^2=t^2+(1-t)^2$$

が得られ，これが点 A$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ を通ることから

$$t^2+(1-t)^2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

となる．ここから t を求める事が出来る．

（これだけ書いたとしても，解答としては十分ではないことに注意！）

3．

(1)

(i) J を基点とした K, L, M の位置ベクトルを $\overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}$ とする。このとき $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{JK}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JL}&=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{ML}\\&=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JK}\end{aligned}$$

である。$\overrightarrow{l}$ が $\overrightarrow{k}, \overrightarrow{m}$ の一次結合で表されるので 4 点 J, K, L, M は同一平面上にある。

(ii) $Q(q, 4n.0), R(0, r, 4n), S(s, 0, 4n)$ とおく。$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ と $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PS}|$ より

$$q+s=4n, p+r=4n, p+q=2n$$

を得るので

$$Q(2n-p, 4n, 0), R(0, 4n-p, 4n), S(2n+p, 0, 4n)$$

である (従って $0\leq p\leq 2n$ である)。

(2) $|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PS}|^2=2p^2-4np+20n^2, (\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS})^2=4n^2-4np$ であるからひし形 $PQRS$ の面積 X は

$$X=\sqrt{(2p^2-4np+20n^2)^2-(4n^2-4np)^2}=2\sqrt{(p^2+8n^2)(p^2-4np+12n^2)}$$

である。ここで $f(p)=(p^2+8n^2)(p^2-4np+12n^2)$ とおくと、

$$f'(p)=4p^3-12np^2+40n^2p-32n^3=4(p-n)\{(p-n)^2+7\}$$

となる。関数の増減を考えると $f(p)$ は $p=n$ のとき最小。このとき X も最小となる。よって求める P, Q, R, S の座標は $P(4n, n, 0), Q(n, 4n, 0), R(0, 3n, 4n), S(3n, 0, 4n)$ である。

(3) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{PS}$ とおく。$\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PS}$ は直交するので

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PS}=0$$

である。よって $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{5}{18}$ であり、$\overrightarrow{OH}=\dfrac{10n}{9}(2,2,1)$ である。
題意の立体の底面は円でその半径は P,Q,R,S のうち H から一番遠い点と H の間の距離である。
$|\overrightarrow{HP}|^2=|\overrightarrow{HQ}|^2=\frac{53}{9},|\overrightarrow{HS}|^2=|\overrightarrow{HR}|^2=\frac{125}{9}$ により、底面の面積は $\frac{125}{9}\pi$ であり $|\overrightarrow{OH}|=\frac{10n}{3}$ なので、求める体積 V は

$$V=\frac{1250n^3}{81}\pi$$

(4) $a_k=\dfrac{100k^2}{9}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{81}{1250(k+i)^3\pi}=\frac{18}{25\pi}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1+\frac{i}{k})^3}$ である。区分求積の公式を利用して

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{18}{25\pi}\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx=\frac{27}{100\pi}$$

となる。