



東京慈恵会医科大学 解答速報

2011年度 数学

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを強く禁止致します。

数学講評

難易度：やや難化 分量：例年通り 一次通過ライン：60%程度 正規合格ライン：70%以上

問題3は状況が複雑であり、計算も煩雑なので、多くの受験生が途中で挫折したと思われる。したがって、この問題が出来ていなくても必ずしも悲観する必要はないが、解答できた受験生は逆に自信を持ってよいだろう。

問題1と問題2は、入試において頻出のテーマであるので、ここでの失点を如何に防ぐことが出来たかが合否を決する。

1.

(A) (1) (ア) $2 - \sqrt{3}$

(2) (イ) $\frac{1}{36}$ (ウ) $\frac{5(2^n - 2)}{6^n}$

(3) (エ) $-1 - \sqrt{2}$ (オ) -2 (カ) $-15 + 16\sqrt{3}i$

(B) 命題①について：

すべての奇数は $2n + 1$ (n は整数) と表される。ところで、整数 n に対して $a = n + 1$, $b = n$ は整数であり、このとき

$$a^2 - b^2 = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

であるから、すべての奇数は $A = \{a^2 - b^2 \mid a, b \text{ は整数}\}$ の要素である。

命題②について：

まず、偶数 m が A の要素ならば、 m は4の倍数であることを示す。

A の要素は整数 a, b により $a^2 - b^2$ と表されるが、

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

であり、 $a + b$ と $a - b$ の偶奇は一致するので、 $a^2 - b^2$ が偶数ならば、 $a + b$ も $a - b$ も偶数、すなわち、

東京慈恵会医科大学 2次対策講座

■慈恵個人面接通信指導

¥3,150 (メールの場合), ¥5,250 (FAXの場合)

メール/FAX を使い (1) 志望理由を完璧な内容に改善し、(2) 出願内容に基づいた想定質問とそれに対する模範解答の作成指導を行います。

■慈恵集団討論完全対策スクーリング

2時間 ¥5,150

周囲と同じことをやっても差はつきません。この集団討論のテクニックを身につけるには最低でも2時間が必要です。事前講義、模擬演習、事後総括等を通して、やってはいけないこととやらなくてはならないことを確実に学んでもらいます。

■慈恵二次対策オールインワンスクーリング

2/16(水)or 2/17(木) ¥26,520

アムスが最強と言われる総合二次対策です。上記通信添削の内容は勿論のこと、アムスの長年のノウハウの全てを伝授します。毎年、想定質問の通りに質問された、集団討論のテーマがあたった等の報告が続出しています。



東京慈恵会医科大学 解答速報

2011年度 数学

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

$$a + b = 2m, \quad a - b = 2n \quad (n, m \text{ は整数})$$

と表される。したがって、このとき

$$a^2 - b^2 = 2m \times 2n = 4mn$$

であり、これは4の倍数である。

ゆえに、偶数 m が A の要素ならば、 m は4の倍数である。

次に、偶数 m が4の倍数であるならば、 m は A の要素であることを示す。ところで、4の倍数はすべて偶数なので、4の倍数がすべて A の要素であることを示せばよい。

さて、任意の整数 n に対して $a = n + 1, b = n - 1$ は整数であるので

$$a^2 - b^2 = (n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$$

は、 A の定義より A の要素である。つまり、4の倍数がすべて A の要素である。

2.

(1) $\angle OPQ = \theta$ とおけば、 $\vec{OP} = (\cos \theta, 0), \vec{OQ} = (0, \sin \theta)$ である。よって、 C 上の点 R に対し

$$\vec{OR} = (1 - t)\vec{OP} + t\vec{OQ} = ((1 - t)\cos \theta, t\sin \theta)$$

となるので、 $R(x, y)$ とおけば

$$\begin{cases} x = (1 - t)\cos \theta \\ y = t\sin \theta \end{cases}$$

後は、この2式から θ を消去して

$$\frac{x^2}{(1 - t)^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$$

を得る。

(2)

(i) $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ と C が接するとき、 $t = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ となる。このとき、 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ より、点 A で $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ と

(page 2 of 5)

医学部合格に必要なすべてを完成させます

ams アムス

受付時間 **TEL.03-3443-1010**
<平日 12-20時>

PC <http://www.ams01.co.jp/> / i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 **TEL.03-3443-0108**
<平日 12-20時>

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> / i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

〒150-0012 渋谷区広尾5丁目4番12号 大成鋼機ビル 5F 日比谷線 広尾駅 2番出口 隣のビル5階



東京慈恵会医科大学 解答速報

2011年度 数学

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

直交する直線として $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ が得られるが、これは明らかに楕円 $3x^2 + \frac{3(2+\sqrt{3})y^2}{2} = 1$ と接していない。

(ii) A を通る直線 $y = m\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}$ と C の式から y を消去して得られる x の2次方程式

$$t^2x^2 + (1-t)^2\left(mx + \frac{\sqrt{3m+\sqrt{2}}}{3}\right)^2 = t^2(1-t^2)$$

$$\Leftrightarrow \{t^2 + m^2(1-t)^2\}x^2 + \frac{2m(1-t)^2(\sqrt{3m+\sqrt{2}})}{3}x + \frac{(1-t)^2(\sqrt{3m+\sqrt{2}})^2}{9} - t^2(1-t)^2 = 0$$

の重解条件として、 m の方程式

$$\frac{m^2(1-t)^4(\sqrt{3m-\sqrt{2}})^2}{9} - \{t^2 + m^2(1-t)^2\} \left\{ \frac{(1-t)^2(\sqrt{3m+\sqrt{2}})^2}{9} - t^2(1-t)^2 \right\} = 0$$

が得られる。この解 m が点 A を通る C の2接線の傾きである。整理すると

$$(9t^2 - 18t + 6)m^2 - 2\sqrt{6}m + 9t^2 - 2 = 0$$

となり、2接線が直交する事から、2解の積 $= -1$ で、今 $t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 9t^2 - 18t + 6 = 0$ であるので

$$\frac{9t^2 - 2}{9t^2 - 18t + 6} = -1$$

$$9t^2 - 18t + 6 = -9t^2 + 2$$

$$9t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

が得られる。

参考

一般に、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に対し、「その点から楕円に引いた2接線が直交する」ような点全体は、円

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

を描き、準円と呼ばれる。

この知識を用いると、曲線 C の準円として

$$x^2 + y^2 = t^2 + (1-t)^2$$

(page 3 of 5)

医学部合格に必要なすべてを完成させます

ams アムス

受付時間 <平日 12-20時> **TEL.03-3443-1010**

PC <http://www.ams01.co.jp/> i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 <平日 12-20時> **TEL.03-3443-0108**

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

〒150-0012 渋谷区広尾5丁目4番12号 大成鋼機ビル 5F 日比谷線 広尾駅 2番出口 隣のビル5階



東京慈恵会医科大学 解答速報

2011年度 数学

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

が得られ、これが点 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ を通ることから

$$t^2 + (1-t)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

となる。ここから t を求める事が出来る。

(これだけ書いたとしても、解答としては十分ではないことに注意！)

3 .

(1)

(i) J を基点とした K, L, M の位置ベクトルを $\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}$ とする。このとき $\vec{ML} = \vec{JK}$ より

$$\begin{aligned} \vec{JL} &= \vec{JM} + \vec{ML} \\ &= \vec{JM} + \vec{JK} \end{aligned}$$

である。 \vec{l} が \vec{k}, \vec{m} の一次結合で表されるので4点 J, K, L, M は同一平面上にある。

(ii) $Q(q, 4n, 0), R(0, r, 4n), S(s, 0, 4n)$ とおく。 $\vec{PQ} = \vec{SR}$ と $|\vec{PQ}| = |\vec{PS}|$ より

$$q + s = 4n, p + r = 4n, p + q = 2n$$

を得るので

$$Q(2n - p, 4n, 0), R(0, 4n - p, 4n), S(2n + p, 0, 4n)$$

である(従って $0 \leq p \leq 2n$ である)。

(2) $|\vec{PQ}|^2 = |\vec{PS}|^2 = 2p^2 - 4np + 20n^2, (\vec{PQ} \cdot \vec{PS})^2 = 4n^2 - 4np$ であるからひし形 $PQRS$ の面積 X は

$$X = \sqrt{(2p^2 - 4np + 20n^2)^2 - (4n^2 - 4np)^2} = 2\sqrt{(p^2 + 8n^2)(p^2 - 4np + 12n^2)}$$

である。ここで $f(p) = (p^2 + 8n^2)(p^2 - 4np + 12n^2)$ とおくと、

$$f'(p) = 4p^3 - 12np^2 + 40n^2p - 32n^3 = 4(p - n)\{(p - n)^2 + 7\}$$

となる。関数の増減を考えると $f(p)$ は $p = n$ のとき最小。このとき X も最小となる。よって求める

P, Q, R, S の座標は $P(4n, n, 0), Q(n, 4n, 0), R(0, 3n, 4n), S(3n, 0, 4n)$ である。

(page 4 of 5)

医学部合格に必要なすべてを完成させます

ams アムス

受付時間 <平日 12-20時> TEL.03-3443-1010

PC <http://www.ams01.co.jp/> i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 <平日 12-20時> TEL.03-3443-0108

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

〒150-0012 渋谷区広尾5丁目4番12号 大成鋼機ビル 5F 日比谷線 広尾駅 2番出口 隣のビル5階



東京慈恵会医科大学 解答速報

2011年度 数学

※この紙面の内容の全て、または一部を無断で複製・転用することを堅く禁止致します。

(3) $\vec{OH} = \vec{OP} + a\vec{PQ} + b\vec{PS}$ とおく。 \vec{OH} と \vec{PQ}, \vec{PS} は直交するので

$$\vec{OH} \cdot \vec{PQ} = \vec{OH} \cdot \vec{PS} = 0$$

である。よって $a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{18}$ であり、 $\vec{OH} = \frac{10n}{9}(2, 2, 1)$ である。

題意の立体の底面は円でその半径は P, Q, R, S のうち H から一番遠い点と H の間の距離である。

$|\vec{HP}|^2 = |\vec{HQ}|^2 = \frac{53}{9}, |\vec{HS}|^2 = |\vec{HR}|^2 = \frac{125}{9}$ により、底面の面積は $\frac{125}{9}\pi$ であり $|\vec{OH}| = \frac{10n}{3}$ なので、求める体積 V は

$$V = \frac{1250n^3}{81}\pi$$

(4) $a_k = \frac{100k^2}{9} \sum_{i=1}^k \frac{81}{1250(k+i)^3\pi} = \frac{18}{25\pi} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1+\frac{i}{k})^3}$ である。区分求積の公式を利用して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{18}{25\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx = \frac{27}{100\pi}$$

となる。

アムス

(page 5 of 5)

医学部合格に必要なすべてを完成させます

アムス

受付時間 **TEL.03-3443-1010**
<平日 12-20時>

PC <http://www.ams01.co.jp/> i-mode <http://www.ams01.co.jp/i/>

東大理系現役合格を実現します。

麻布八雙会

受付時間 **TEL.03-3443-0108**
<平日 12-20時>

PC <http://www.azabu-hassoukai.jp/> i-mode <http://www.azabu-hassoukai.jp/i/>

〒150-0012 渋谷区広尾5丁目4番12号 大成鋼機ビル 5F 日比谷線 広尾駅 2番出口 隣のビル5階