

Windom の解答速報 東京慈恵会医科大学 数学

1.

- (A) (ア) $2-\sqrt{3}$
 (イ) $\frac{1}{36}$
 (ウ) $5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$
 (エ) $-1-\sqrt{2}$
 (オ) -2
 (カ) $-15+16\sqrt{3}i$

(B) 命題①

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m+1 \quad \text{だから}$$

(m は整数)

すなわち奇数は A の要素である。

命題②

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k \quad \text{だから}$$

(k :整数)

4 の倍数 m は A の要素である。

逆に偶数 m が A の要素であるとき、

$$a^2 - b^2 = 4 \quad a, b \text{ の偶, 奇は}$$

一致する。

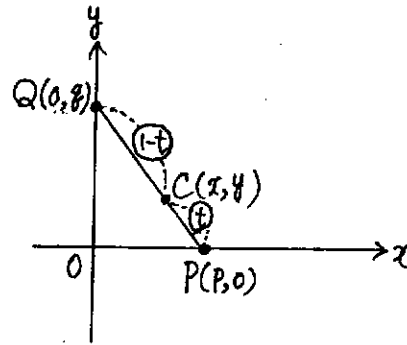
$$\begin{aligned} \therefore a \text{ のとき, } (2p)^2 - (2q)^2 &= 4(p^2 - q^2) \\ (2p+1)^2 - (2q+1)^2 &= 4(p^2 - q^2) \\ &\quad + 4(p - q) \end{aligned}$$

(p, q は整数)

すなわち 4 の倍数と等しい

以上から 題意は成立する

2.



(1) 上図のように $P(p, 0), Q(0, q), C(x, y)$ とおくと、内分点の公式より、

$$x = (1-t)p, \quad y = tq$$

$0 < t < 1$ より、

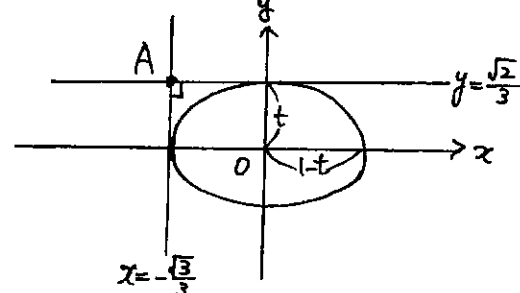
$$p = \frac{x}{1-t}, \quad q = \frac{y}{t}$$

$$PQ = 1 \iff p^2 + q^2 = 1 \quad \text{であるから}$$

$$\left(\frac{x}{1-t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 = 1$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{(1-t)^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) (i) 仮に条件をみたす2本の接線の一方が直線 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である場合、もう一方は直線 $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ となり、



上図のようになるはずである。

このとき、

$$\begin{cases} 1-t = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ① \\ t = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \dots\dots ② \end{cases} \quad \text{を同時にみたす}$$

t が存在しなければならぬが、

$$\text{①より, } t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{②より, } t = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

となり、 t の値が一致しない。

よって、条件をみたす2本の接線の一方が直線 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ となることはない。

(ii) (i)より、点A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})からC(1,0)に引いた接線は、

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = m(x + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Leftrightarrow y = mx + \frac{\sqrt{3}m + \sqrt{3}}{2}$$

とおくことができる。

これとCの式からyを消去すると、

$$\frac{x^2}{(1-t)^2} + \frac{1}{t^2} \left(\frac{3mx + \sqrt{3}m + \sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{(1-t)^2} + \frac{9m^2x^2 + 6\sqrt{3}m^2x + 6\sqrt{3}m^2 + 2\sqrt{3}m + 2}{4t^2} = 1$$

$$\therefore 9t^2x^2 + (1-t)^2 \{ 9m^2x^2 + 2(3\sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}m)x + 3m^2 + 2\sqrt{3}m + 2 \} = 9t^2(1-t)^2$$

$$\therefore \{ 9t^2 + (1-t)^2 \cdot 9m^2 \} x^2 + 2(3\sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}m)(1-t)^2 x + (1-t)^2 (3m^2 + 2\sqrt{3}m + 2) - 9t^2(1-t)^2 = 0$$

$$\text{判別式をDとすると、}$$

$$D/4 = \{ (3\sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}m)(1-t)^2 \}^2 - \{ 9t^2 + (1-t)^2 \cdot 9m^2 \} \{ (1-t)^2 (3m^2 + 2\sqrt{3}m + 2) - 9t^2(1-t)^2 \} = 0 \text{ であり、}$$

$$(3\sqrt{3}m^2 + \sqrt{3}m)^2(1-t)^4 - \{ 9t^2 + (1-t)^2 \cdot 9m^2 \} (3m^2 + 2\sqrt{3}m + 2 - 9t^2) = 0$$

$$\therefore \{ 81t^4(1-t)^2 - 27t^2 \} m^2 - 18\sqrt{3}t^2 m + 81t^4 - 18t^2 = 0 \dots \dots \textcircled{3}$$

点AからCに引いた二本の接線の傾きをそれぞれm1, m2とおくと、

m1, m2は③の2つの解であり、解と係数の関係より、

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{81t^4 - 18t^2}{81t^4(1-t)^2 - 27t^2} = -1$$

整理すると、

$$9t^2 - 9t + 2 = 0$$

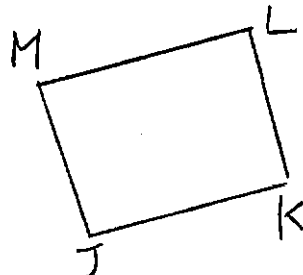
$$\therefore (3t-2)(3t-1) = 0$$

0 < t < 1 より、

$$t = \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \dots \dots \text{答え}$$

3.

(i) (i)



$\overrightarrow{TK} = \overrightarrow{ML}$ であり 四角形JKLMは

平行四辺形とあるから、4点

J, K, L, Mは同一平面上にある。

- (ii) P(4m, p, 0) (0 ≤ p ≤ 4m)
- Q(r, 4m, 0) (0 ≤ r ≤ 4m)
- R(0, r, 4m) (0 ≤ r ≤ 4m)
- S(s, 0, 4m) (0 ≤ s ≤ 4m)

とある。PQRSは平行四辺形だから

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{かつ } PQ = QR \dots \dots \textcircled{2}$$

①より

$$\begin{pmatrix} r-4m \\ 4m-p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r-4m = -s \dots \dots \textcircled{3}$$

$$4m-p = r \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\text{また、 } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} r-4m \\ 4m-p \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -r \\ r-4m \\ 4m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -p \\ 4m \end{pmatrix} \quad [\textcircled{3}, \textcircled{4}]$$

②より

$$(r-4m)^2 + (4m-p)^2 = s^2 + r^2 + 16m^2$$

$$-8mr - 8mp + 32p^2 = s^2 + r^2 + 16m^2$$

$$r + s = 2m$$

$$s = 2m - r$$

$$\textcircled{3}より S = 4m - s = 2m + r$$

以上から

$$P(4m, p, 0)$$

$$Q(2m-r, 4m, 0)$$

$$R(0, r, 4m)$$

$$S(2m+r, 0, 4m)$$

(2) 四角形PQRSの面積をTとすると

$$T^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS})^2$$

$$\therefore \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} p-2m \\ -p \\ 4m \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -p-2m \\ -p+4m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \{ (p-2m)^2 + p^2 + (4m)^2 \} \{ (-p-2m)^2 + (-p+4m)^2 \} - (-p^2 + 4m^2 + p^2 - 4mp)^2$$

$$= (2p^2 - 4mp + 20m^2)(2p^2 - 4mp + 20m^2) - \{ 4m(p-m) \}^2$$

$$= 4(p^2 - 2mp + 10m^2)^2 - 16m^2(p-m)^2$$

$$= 4 \{ (p-m)^2 + 9m^2 \}^2 - 16m^2(p-m)^2$$

$$= 4 \left[\{ (p-m)^2 + 9m^2 \}^2 + 32m^4 \right]$$

p = mの時、最小とある

∴ a とす

$$P(4m, m, 0)$$

$$Q(m, 4m, 0)$$

$$R(0, 3m, 4m)$$

$$S(3m, 0, 4m)$$

$$(3) \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -3m \\ 3m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{PS} = \begin{pmatrix} -m \\ -m \\ 4m \end{pmatrix}$$

\vec{PQ}, \vec{PS} の両方に垂直と仮定して

$$\therefore \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

平面 PQRS 上の任意の点 X

$X(x, y, z)$ とおくと

$$\vec{AX} \cdot \vec{h} = 0 \quad \text{より}$$

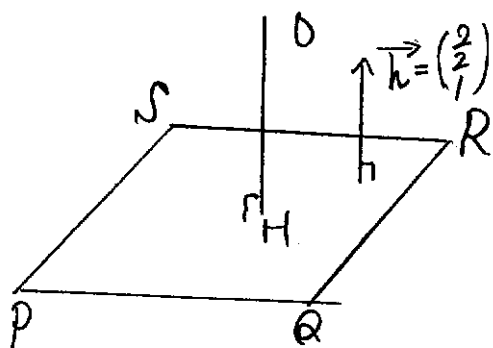
$$2(x-4m) + 2(y-m) + z = 0$$

$$2x + 2y + z - 10m = 0 \quad \text{--- (*)}$$

O から平面 PQRS へ下ろした垂線の足を H とすると

$\vec{OH} \parallel \vec{h}$ だから

$$\vec{OH} = t \vec{h} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$



H は (*) 上の点だから

$$2(2t) + 2(2t) + t - 10m = 0$$

$$t = \frac{10m}{9}$$

$$\therefore H \left(\frac{20m}{9}, \frac{20m}{9}, \frac{10m}{9} \right)$$

$$\therefore HP = HQ < HS = HR$$

求める立体の体積は

$|\vec{HS}|$ を半径とし、高さが $|\vec{OH}|$ とする円錐だから

$$V(m) = \frac{\pi}{3} |\vec{HS}|^2 \times |\vec{OH}|$$

$$\therefore \vec{HS} = \begin{pmatrix} \frac{7m}{9} \\ -\frac{20m}{9} \\ \frac{26m}{9} \end{pmatrix} = \frac{m}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{HS}|^2 = \frac{m^2}{81} \{7^2 + (-20)^2 + 26^2\}$$

$$= \frac{m^2}{81} \cdot 1125$$

$$= \frac{m^2}{81} \cdot 5^3 \cdot 9$$

$$= \frac{5^3 m^2}{9}$$

$$|\vec{OH}| = \frac{10m}{9} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{10m}{3}$$

∴

$$V(m) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5^3 m^2}{9} \cdot \frac{10m}{3} = \frac{\pi \cdot 5^4 \cdot 2}{3^4} m^3$$

講評

昨年より比べ、計算量、難易度共に
上がった。特に3の空間座標と
立体の体積は、受験生が苦手と
する分野なので、手が止まる
受験生が多かったと思われる。

合格点も昨年より下がり、
70%前後と思われる。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad a_k &= \left(\frac{10}{3}k\right)^2 \sum_{l=1}^k \frac{1}{V(k+l)} \\
 &= \frac{10^2}{3^2} \sum_{l=1}^k \frac{3^4 \cdot k^2}{\pi \cdot 5^4 \cdot 2 (k+l)^3} \\
 &= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \sum_{l=1}^k \frac{1}{\left(1+\frac{l}{k}\right)^3} \frac{1}{k} \\
 &\xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx \\
 &\quad \text{[区別求積法]}
 \end{aligned}$$

併記

$$\begin{aligned}
 \text{公式} &= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{3^2 \cdot 2}{\pi \cdot 5^2} \cdot \frac{3}{8} \\
 &= \frac{27}{100\pi}
 \end{aligned}$$