1.

(A). 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) ∠A が直角，辺 BC の長さが 1 の直角二等辺三角形 ABC がある。BC 上に，頂点と異なる 2 点 P, Q を ∠BAP = ∠PAQ = ∠QAC をみたすようにとると，PQ の長さの値は $\boxed{(ア)}$ である。

(2) n を 2 以上の自然数とする。n 個のさいころを同時に投げて，出た目の最大値を X，最小値を Y とする。$n = 3$ のとき，$X = 3$ かつ $Y = 2$ となる確率は $\boxed{(イ)}$ である。

一般の n に対し，$X - Y = 1$ となる確率を n を用いて表すと $\boxed{(ウ)}$ である。

(3) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + (2 + \sqrt{2})x + b = 0$ の 1 つの解が $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i}{2}$ であるとき，実数の定数 a, b の値を求めると $a = \boxed{(エ)}$, $b = \boxed{(オ)}$ である。ただし，i は虚数単位とする。また，この方程式の他の 2 つの解を α, β とし，$\alpha^{10} + \beta^{10}$ の値を求めると，$\alpha^{10} + \beta^{10} = \boxed{(カ)}$ である。

(B). 次の命題 ①, ② が成り立つことを解答欄に証明せよ。

$2n$, $2n+1$ (n は整数) と表される整数を，順に偶数，奇数という。
集合 A を $A = \{a^2 - b^2 \mid a,\ b \text{ は整数}\}$ と定める。

命題 ①「すべての奇数は A の要素である」

m を偶数とする。

命題 ②「m が 4 の倍数であることは，m が A の要素であるための必要十分条件である」

2． t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。xy 平面上に長さが 1 の線分 PQ がある。点 P は x 軸上を動き，点 Q は y 軸上を動くとき，線分 PQ を $t : 1-t$ に内分する点の軌跡を C とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を t を用いて表せ。

(2) 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ から C にひいた 2 本の接線が直交するような t の値を求めたい。

(i) 条件をみたす 2 本の接線の一方が直線 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ となることはない。その理由を述べよ。

(ii) t の値を求めよ。

3. nを正の整数の定数とする。座標空間内の8点 O(0, 0, 0), A($4n$, 0, 0), B($4n$, $4n$, 0), C(0, $4n$, 0), D(0, 0, $4n$), E($4n$, 0, $4n$), F($4n$, $4n$, $4n$), G(0, $4n$, $4n$) を頂点とする立方体 OABC-DEFG の辺 AB, BC, DG, DE 上に，それぞれ動点 P, Q, R, S がある。この4点 P, Q, R, S は，同一平面上にあり，さらに四角形 PQRS がひし形になるように，いろいろと動く。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) (i) 一般に，座標空間内の同一直線上にない異なる4点 J, K, L, M について，$\overrightarrow{\mathrm{JK}} = \overrightarrow{\mathrm{ML}}$ が成り立つならば J, K, L, M は同一平面上にある。その理由を述べよ。

(ii) 点Pの座標を $(4n,\ p,\ 0)$（ただし $0 \leqq p \leqq 4n$）とする。四角形 PQRS がひし形であるときの Q, R, S の座標を n と p を用いて表せ。

(2) 四角形 PQRS の面積を最小にするような P, Q, R, S の座標を n を用いて表せ。

(3) (2) で求めた P, Q, R, S を考える。O から4点 P, Q, R, S を通る平面に垂線をひき，交点を H とする。頂点を O，底面を四角形 PQRS とする四角錐 O-PQRS を垂線 OH のまわりに1回転してできる立体の体積 $V(n)$ を n を用いて表せ。

(4) (3) で求めた n の関数 $V(n)$ を用いた数列

$$a_k = \left(\frac{10k}{3}\right)^2 \left\{ \frac{1}{V(k+1)} + \frac{1}{V(k+2)} + \cdots + \frac{1}{V(k+k)} \right\}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3\ \cdots)$$

の極限値 $\displaystyle\lim_{k \to \infty} a_k$ を求めよ。